Prof. Dr. Alfred Toth

Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen III

1. In Toth (2011a) hatten wir gezeigt, dass man die triadische Peircesche Zeichenrelation ZR = (M, O, I) als Wurzel komplexer Zahlen auffassen kann, und in Toth (2011b) wurde gezeigt, dass sich die Partialrelationen von ZR mit Hilfe der Kreises des „parabolic pencils“ im Rahmen einer Möbius-Transformation der Gaußschen Zahlenebene auffassen lassen. Im folgenden wollen wir die bekannte Tatsache, dass die Eulersche Formel einen Zusammenhang zwischen der algebraischen, der trigonometrischen und der Exponentialfunktion komplexer Zahlen herstellt, ebenfalls für die Definition von Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen nutzen.

2. Die Eulersche Formel besagt folgendes:

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}}$$

Falls man das Zeichen wie bei Peirce und Bense als reelle Zahlen definiert, setzt man einfach z = x. Setzt man nun x = φ, dann erhält man die Exponentialform der komplexen Zahlen:

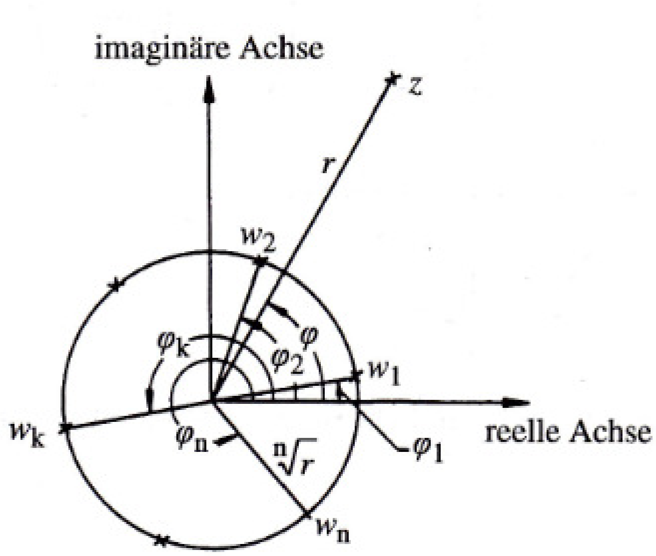
$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$

Die folgenden Beispiele für die drei Formen komplexer Zahlen sind Kemnitz (1998, S. 47) entnommen:

■ Beispiel für eine komplexe Zahl in verschiedenen Formen:

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 1 + \sqrt{3}\,i && \text{(algebraische Form)} \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) && \text{(trigonometrische Form)} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} && \text{(Exponentialform)} \end{aligned}$$

Dabei wird der Zusammenhang zwischen komplexem z, reellem x und dem Winkel φ aus dem folgenden, ebenfalls Kemnitz (1998, S. 45) entommenen Bild klar:



Darin sind die w_n die n-ten Einheitswurzeln von z, d.h. alle möglichen Punkte von ZR = (M, O, I). Die φ_i geben somit den Abstand der Zeichenfunktion, definiert als Funktion reellen Welt- und der imaginären Bewusstseinsachse (vgl. Bense 1975, S. 16), von der reellen Achse, d.h. den Abstand des Zeichens vom ontologischen Raum (vgl. Bense 1975, S. 65 f.), an.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1979

Kemnitz, Arnfried, Mathematik zum Studienbeginn. Braunschweig 1998

Toth, Alfred, Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen I, II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a, b

10.6.2011